УДК 514.75

О. О. Белова

(Балтийский федеральный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ТЕНЗОР КРУЧЕНИЯ ПОДСВЯЗНОСТИ В РАССЛОЕНИИ НАД ГРАССМАНОПОДОБНЫМ МНОГООБРАЗИЕМ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

В n-мерном проективном пространстве исследуется грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей размерности m. Введен объект кручения подсвязности в расслоении, ассоциированном с многообразием $Gr^*(m,n)$. Показано, что данный объект образует тензор, содержащий один простейший и четыре простых подтензора.

Ключевые слова: проективное пространство, грассманоподобное многообразие центрированных плоскостей, связность, тензор кручения.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ ($I, \ldots = 1, \ldots, n$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I\,,\ dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A\,,$$

причем формы Пфаффа $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \ D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$
$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I. \tag{1}$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ [1] центрированных m-мерных плоскостей L_m^*. Помещаем вершины A, A_a на плоскость L_m^* и фиксируем центр A (индексы принимают значения: $a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$). Уравнения $\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha$ являются уравнениями грассманоподобного многообразия $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей, причем компоненты фундаментального объекта $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм ω^α, ω_a^α

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0; \ \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0. \tag{2}$$

При указанной специализации подвижного репера структурные уравнения (1) базисных форм принимают вид:

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \Lambda_\beta^a \omega^\beta \wedge \omega_a^\alpha + \Lambda_\beta^{ab} \omega_b^\beta \wedge \omega_a^\alpha;$$
$$D\omega_a^\alpha = \omega_a^b \wedge \omega_b^\alpha + \omega_a^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega_a \wedge \omega^\alpha. \tag{3}$$

Над многообразием $V^* = Gr^*(m,n)$ возникает главное расслоение $G^*(V^*)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G^* центрированной плоскости L_m^*. Главное расслоение $G^*(V^*)$ содержит следующие фактор-расслоения: плоскостных линейных реперов со слоевыми формами ω_b^a, нормальных линейных реперов (слоевые формы ω_β^α), центропроективных реперов (ω_b^a, ω_a) и аффинное фактор-расслоение (ω_b^a, ω_β^α, ω_α^a), типовым слоем которого служит аффинная фактор-группа [2] группы G^*.

В главном расслоении $G^*(V^*)$ задается фундаментально-групповая связность по Г. Ф. Лаптеву:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - L_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha ; \ \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma ;$$

$$\tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha\beta}^{ab} \omega_b^\beta ; \ \tilde{\omega}_a = \omega_a - L_{a\alpha} \omega^\alpha - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha ;$$

$$\tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - L_{\alpha\beta} \omega^\beta - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta .$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [3] связность в ассоциированном расслоении $G^*(V^*)$ определяется с помощью поля объекта связности

$$\Gamma = \{ \Gamma_{b\alpha}^a, L_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{\alpha\beta}^a, L_{\alpha\beta}^{ab}, L_{a\alpha}, \Pi_{a\alpha}^b, L_{\alpha\beta}, \Pi_{\alpha\beta}^a \}$$

на базе V^* следующими сравнениями:

$$\begin{gathered}
\Delta\Gamma_{b\alpha}^a + L_{b\alpha}^{ac}\omega_c - \omega_{b\alpha}^a \equiv 0 , \ \Delta L_{b\alpha}^{ac} - \omega_{b\alpha}^{ac} \equiv 0 , \\
\Delta\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + L_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a - \omega_{\beta\gamma}^\alpha \equiv 0 , \ \Delta L_{\beta\gamma}^{\alpha a} - \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} \equiv 0 , \\
\Delta\Gamma_{\alpha\beta}^a + L_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b + (\delta_b^a \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma - \delta_\alpha^\gamma \Gamma_{b\beta}^a)\omega_\gamma^b - \omega_{\alpha\beta}^a \equiv 0 , \\
\Delta L_{\alpha\beta}^{ab} + (\delta_c^a L_{\alpha\beta}^{\gamma b} - \delta_\alpha^\gamma L_{c\beta}^{ab})\omega_\gamma^c - \omega_{\alpha\beta}^{ab} \equiv 0 , \ \Delta L_{a\alpha} + (\Pi_{a\alpha}^b + \Gamma_{a\alpha}^b)\omega_b \equiv 0 , \\
\Delta\Pi_{a\alpha}^b + L_{a\alpha}^{cb}\omega_c + \delta_a^b \omega_\alpha \equiv 0 , \qquad (4) \\
\Delta L_{\alpha\beta} + (\Pi_{\alpha\beta}^a + \Gamma_{\alpha\beta}^a)\omega_a - L_{a\beta}\omega_\alpha^a + \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma \omega_\gamma \equiv 0 , \\
\Delta\Pi_{\alpha\beta}^a + L_{\alpha\beta}^{ba}\omega_b - \Pi_{b\beta}^a \omega_\alpha^b + L_{\alpha\beta}^{\gamma a}\omega_\gamma \equiv 0 ,
\end{gathered}$$

где введены обозначения:

$$\begin{gathered}
\omega_{b\alpha}^a = \delta_b^a \Lambda_\alpha^c \omega_c + \delta_b^a \omega_\alpha + \Lambda_\alpha^a \omega_b , \ \omega_{b\alpha}^{ac} = \delta_b^a \Lambda_\alpha^{ec} \omega_e - \delta_b^c \omega_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ac} \omega_b , \\
\omega_{\beta\gamma}^\alpha = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^a \omega_a + \delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta , \ \omega_{\beta\gamma}^{\alpha a} = \delta_\beta^\alpha \Lambda_\gamma^{ba} \omega_b + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta^a , \\
\omega_{\alpha\beta}^a = \Lambda_\beta^a \omega_\alpha , \ \omega_{\alpha\beta}^{ab} = \Lambda_\beta^{ab} \omega_\alpha .
\end{gathered}$$

Объект связности Γ содержит подобъект

$$\Gamma_1 = \{ \Gamma_{b\alpha}^a, L_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^{\alpha a}, L_{a\alpha}, \Pi_{a\alpha}^b \} ,$$

состоящий из объектов центропроективной и нормальной линейной связностей.

Подставляя в структурные уравнения (3) базисных форм ω^{α}, ω_a^{α} многообразия G^* формы связности $\tilde{\omega}_b^a$, $\tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha}$, $\tilde{\omega}_a$, приходим к следующим уравнениям:

$$D\omega^{\alpha} = \omega^{\beta} \wedge \tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha} + S_{\beta\gamma}^{\alpha}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + S_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega^{\beta} \wedge \omega_a^{\gamma} + S_{\beta\gamma}^{\alpha ab}\omega_a^{\beta} \wedge \omega_b^{\gamma},$$

$$D\omega_a^{\alpha} = \tilde{\omega}_a^b \wedge \omega_b^{\alpha} + \omega_a^{\beta} \wedge \tilde{\omega}_{\beta}^{\alpha} + \tilde{\omega}_a \wedge \omega^{\alpha} + S_{a\beta\gamma}^{\alpha}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} +$$
$$+ S_{a\beta\gamma}^{\alpha b}\omega^{\beta} \wedge \omega_b^{\gamma} + S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc}\omega_b^{\beta} \wedge \omega_c^{\gamma},$$

где компоненты объекта S выражаются по формулам:

$$S_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{[\beta\gamma]}^{\alpha}, \; S_{\beta\gamma}^{\alpha a} = L_{\beta\gamma}^{\alpha a} + \delta_{\gamma}^{\alpha}\Lambda_{\beta}^{a}, \; S_{\beta\gamma}^{\alpha ab} = -\delta_{\lfloor\beta}^{\alpha}\Lambda^{\lceil a\;b}_{\;\;\;\gamma\rfloor\rceil},$$

$$S_{a\beta\gamma}^{\alpha} = -\delta_{[\beta}^{\alpha}L_{a\gamma]}, \; S_{a\beta\gamma}^{\alpha b} = \delta_{\gamma}^{\alpha}\Gamma_{a\beta}^{b} - \delta_{a}^{b}\Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} - \delta_{\beta}^{\alpha}\Pi_{a\gamma}^{b},$$

$$S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} = \delta_{a}^{\lceil b}L_{\lfloor\beta\;\;\gamma\rfloor}^{\alpha\;\;c\rceil} - \delta_{\lfloor\beta}^{\alpha}L_{a\;\;\gamma\rfloor}^{\lceil b\;c\rceil},$$

здесь квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам и парам индексов.

Учитывая дифференциальные сравнения (2) компонент фундаментального объекта Λ и сравнения (4) компонент подобъекта Γ_1, приходим к следующим сравнениям по модулю базисных форм:

$$\Delta S_{\beta\gamma}^{\alpha} + S_{[\beta\gamma]}^{\alpha a}\omega_a \equiv 0, \; \Delta S_{\beta\gamma}^{\alpha a} + 2S_{\beta\gamma}^{\alpha ba}\omega_b \equiv 0, \; \Delta S_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \equiv 0,$$

$$\Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha} + S_{a[\beta\gamma]}^{\alpha b}\omega_b - S_{\beta\gamma}^{\alpha}\omega_a \equiv 0, \; \Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha b} + 2S_{a\beta\gamma}^{\alpha cb}\omega_c - S_{\beta\gamma}^{\alpha b}\omega_a \equiv 0,$$

$$\Delta S_{a\beta\gamma}^{\alpha bc} - S_{\beta\gamma}^{\alpha bc}\omega_a \equiv 0.$$

Теорема. *Объект кручения S подсвязности Γ_1 грассманоподобного многообразия G^* центрированных плоскостей является тензором, содержащим один простейший [2] подтензор $S_0 = \{ S_{\beta\gamma}^{\alpha ab} \}$ и четыре простых подтензора*

$S_1 = \{S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}$, $S_2 = \{S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\}$, $S_3 = \{S^{\alpha}_{\beta\gamma}, S^{\alpha a}_{\beta\gamma}, S^{\alpha ab}_{\beta\gamma}\}$,

$S_4 = \{S^{\alpha b}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, S^{\alpha b}_{\beta\gamma}, S^{\alpha bc}_{\beta\gamma}\}$.

Следствие. *Подтензоры тензора кручения S подчиняются следующей схеме включений*

$$\begin{array}{ccccc} S_1 & \supset & S_0 & \subset & S_2 \\ \cap & & & & \cap \\ S_3 & \subset & S & \supset & S_4, \end{array}$$

причем $S_1 \subset S_4$.

Список литературы

1. *Белова О.О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. 2006. №5 (52). С. 18—20.

2. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

O. Belova

THE TORSION TENSOR OF THE SUBCONNECTION IN THE FIBERING OVER GRASSMAN-LIKE MANIFOLD OF CENTERED PLANES

Grassman-like manifold $Gr^*(m,n)$ of centered m-planes is considered in the projective space P_n. The torsion object of the subconnection are introduced. It is shown, that torsion object of the subconnection is a tensor. It contains one elementary and four simple subtensors.